# OSCILLATEUR HARMONIQUE NON AMORTI EN MÉCANIQUE

## Sommaire

# SIGNAUX PHYSIQUES

## Bloc 1 : Oscillateur harmonique non amorti en mécanique

Ce système permet d'introduire le concept fondamental d'équation différentielle modèle de l'évolution temporelle

| Notions et contenus | Capacités exigibles |
|---|---|
| **1. Oscillateur harmonique** | |
| Mouvement horizontal sans frottement d'une masse accrochée à un ressort linéaire sans masse. Position d'équilibre. | Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique. La résoudre compte tenu des conditions initiales.<br><br>Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.<br><br>Contrôler la cohérence de la solution obtenue avec la conservation de l'énergie mécanique, l'expression de l'énergie potentielle élastique étant ici affirmée. |

# I. Force de rappel élastique exercée par un ressort

## A. Notations

On note :

$\ell_0$ : la longueur à vide du ressort

$\ell$ : la longueur du ressort

(dans la suite, on notera aussi :

$\ell_{eq}$ : la longueur du ressort à l'équilibre).

On note :

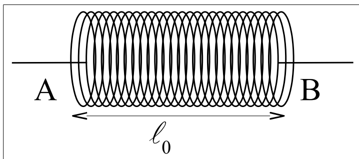
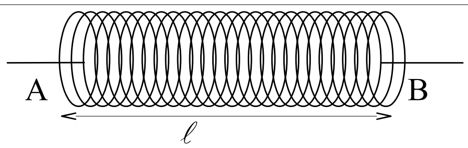
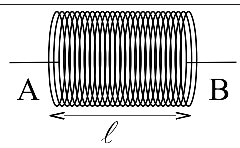
$k$ : la constante de raideur du ressort.

L'allongement du ressort est $(\ell-\ell_0)$ . Il s'agit d'une grandeur algébrique, négative dans le cas où le ressort est comprimé.

## B. Force de rappel

La grandeur de la force de rappel ou force élastique exercée par le ressort en ses deux extrémités $A$ et $B$ est proportionnelle à l'allongement $(\ell-\ell_0)$ et à la raideur $k$ (loi de Hooke). Si le ressort est « trop » tendu ou « trop » comprimé la déformation n'est plus élastique mais plastique.

Pour préciser la force, il faut donner l'écriture vectorielle, sachant que le sens des forces en $A$ et en $B$ est tel que le ressort cherche à retrouver sa longueur à vide.

| | | |
|---|---|---|
|   |   |   |
| Ressort<br>à vide | Ressort<br>en extension | Ressort<br>en compression |
| $\ell=\ell_0$ | $\ell>\ell_0$ | $\ell<\ell_0$ |
| Pas de forces de rappel | Sens des forces de rappel :<br>$\vec{F}_A \rightarrow$ $\leftarrow \vec{F}_B$ | Sens des forces de rappel :<br>$\leftarrow \vec{F}_A$ $\vec{F}_B \rightarrow$ |

Pour exprimer le résultat en $A$ , on utilise un vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur du ressort, c'est-à-dire de sens $B \rightarrow A$ noté $\vec{u}_{BA}$ . On a $\vec{F}_A=-k(\ell-\ell_0)\vec{u}_{BA}$ . Pour le ressort dilaté, la force en $A$ est bien dirigée dans le sens $A$ vers $B$ . Pour le ressort comprimé, la force en $A$ est bien dirigée dans le sens $B$ vers $A$ .

Pour exprimer le résultat en $B$ , on utilise un vecteur unitaire dirigé vers l'extérieur du ressort, c'est-à-dire de sens $A \rightarrow B$ noté $\vec{u}_{AB}$ . On a $\vec{F}_B=-k(\ell-\ell_0)\vec{u}_{AB}$ . On a $\vec{F}_B=-\vec{F}_A$ en accord avec le principe de l'action et de la réaction.

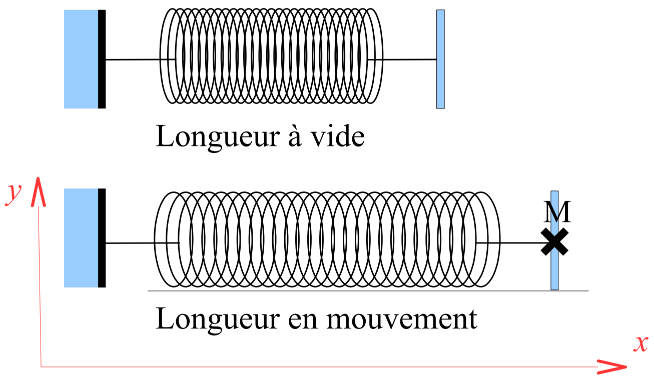
On peut utiliser la formule qui résume tous les cas :

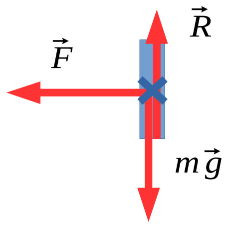
$$\boxed{\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{ext}}$$

(on retrouve en supposant le ressort dilaté, la formule obtenue étant aussi valable si le ressort est comprimé)

# II. Mouvement horizontal sans frottement d'une masse accrochée à un ressort sans masse

## A. Présentation du problème




Les forces

(Sur le dessin, on a supposé $\ell > \ell_0$ d'où le sens choisi pour $\vec{F}$. Pour favoriser la lecture le poids $m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ ont été représentés en léger décalage selon l'axe $x$ )

avec :

$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$

$\vec{R} = R\vec{u}_y$ (en l'absence de frottement solide)

$m\vec{g} = -m\|\vec{g}\|\vec{u}_y = -mg\vec{u}_y$

## B. Équation différentielle

On désigne par $x$ l'abscisse du point $M$ et par $\vec{a}$ l'accélération du point $M$ avec $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + 0\vec{u}_y$ puisque le point ne se déplace pas selon $y$ . On remarquera que l'axe des $x$ est défini plus haut mais que le choix de son origine est encore à préciser.

On applique le principe fondamental :

$$\begin{array}{ccccccccc} \vec{F} & + & \vec{R} & + & m\vec{g} & = & m & \vec{a} \\ -k(\ell-\ell_0)\vec{u}_x & + & R\vec{u}_y & - & mg\vec{u}_y & = & m & \dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x \end{array}$$

puis on projette sur les deux axes choisis :

$$\boxed{/x \quad -k(\ell-\ell_0) \quad = \quad m\dfrac{d^2x}{dt^2}} \quad (1)$$

$$/y \quad R \quad - \quad mg \quad = \quad 0$$

On choisit une origine quelconque sur l'axe. L'abscisse de $M$ est notée $x$. Lorsque le ressort a sa longueur à vide, l'abscisse de $M=M_0$ est $x_0$ (dans le cas où l'origine est prise sur l'extrémité fixée du ressort, alors $x=\ell$ et $x_0=\ell_0$). Dans tous les cas $(\ell-\ell_0)\vec{u}_x=\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\vec{u}_x$.

Avec une origine quelconque sur l'axe, l'équation différentielle du mouvement est donc :

$$\boxed{-k(x-x_0)=m\frac{d^2x}{dt^2}} \quad (2)$$

## C. Position d'équilibre

On choisit souvent comme origine de l'axe la position d'équilibre $M_{eq}$ du mobile. Avec cette origine, l'abscisse sera notée $X$ avec $X=x-x_{eq}$.

Certes, on aurait pu commencer par étudier la position d'équilibre.

En fait, il suffit dans l'équation générale $(1)$ obtenue pour le mouvement, de porter la condition d'équilibre : l'accélération $\frac{d^2x}{dt^2}$ est nulle à l'équilibre. On obtient alors : $-k(\ell_{eq}-\ell_0)=0$ soit :

$$\boxed{\ell_{eq}=\ell_0}$$

À l'équilibre, ce qui est évident, le ressort a ici la même longueur qu'à vide.

$$-k(x-x_{eq})=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{-kX=m\frac{d^2X}{dt^2}} \quad (3)$$

(le passage de $(2)$ à $(3)$ pouvait s'expliquer mathématiquement par un simple changement de variable $X=x-x_0$ )

## D. Résolution de l'équation différentielle

On résout $(3)$.

$$-kX=m\frac{d^2X}{dt^2}$$

$$\ddot{X}+\frac{k}{m}X=0$$

### 1 Dimensions

- d'une pulsation $\omega$

$[\omega]=T^{-1}$ (unité de $\omega$ : $rad.s^{-1}$ )

- du rapport $\frac{k}{m}$

soit on remarque que :

$$\left[\frac{k}{m}\right]=\frac{[\ddot{X}]}{[X]}$$

$$\left[\frac{k}{m}\right]=\frac{LT^{-2}}{L}$$

$$\left[\frac{k}{m}\right]=T^{-2}$$

soit on fait :

$\left[\frac{k}{m}\right]=\frac{[k]}{[m]}$ (unité de $k$ : $N.m^{-1}$ )

$$\left[\frac{k}{m}\right]=\frac{[F]L^{-1}}{M}$$

et en remarquant qu'une force, c'est le produit d'une masse par une accélération

$$\left[\frac{k}{m}\right]=\frac{MLT^{-2}L^{-1}}{M}$$

$$\left[\frac{k}{m}\right]=T^{-2}$$

Il n'y a pas d'incohérence à poser $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$ (pulsation propre).

$$\ddot{X}+\omega_0^2\,X=0$$

## 2 Équation du mouvement

La solution de cette équation différentielle peut s'écrire sous la forme :

$X=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$ (les deux constantes $A$ et $\varphi$ sont à déterminer en connaissant les conditions initiales : position et vitesse en $t=0$ )

ou sous la forme :

$X=a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)$ (les deux constantes $a$ et $b$ sont à déterminer en connaissant les conditions initiales).

La deuxième écriture est sans doute plus pratique pour une résolution mathématique. La première écriture est plus intéressante sur le plan physique car elle permet d'accéder directement à l'amplitude ( $A$ choisi positif) et la phase (phase à l'origine $\varphi$ par exemple entre $-\pi$ et $\pi$ , obtenue modulo $2\pi$ ).

On choisit ici la première écriture.

$$X=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

$$\dot{X}=-A\,\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

*a) Conditions initiales 1*

En $t=0$ , $X=a>0$ et $v=0$

On doit résoudre :

$a=A\cos(\varphi)$

$0=-A\omega_0\sin(\varphi)$

On peut choisir $A=a$ et $\varphi=0$ .

(les autres choix possibles reviennent à cette même solution)

$$\boxed{X=a\cos(\omega_0 t)}$$

*b) Conditions initiales 2*

En $t=0$ , $X=0$ et $v=-v_0$

On doit résoudre :

$0=A\cos(\varphi)$

$-v_0=-A\omega_0\sin(\varphi)$

On peut choisir $A=\frac{v_0}{\omega_0}$ et $\varphi=\frac{\pi}{2}$ .

$X=\frac{v_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t+\frac{\pi}{2})$

$$\boxed{X=-\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

*c) Conditions initiales 3*

En $t=0$ , $X=-a<0$ et $v=0$

On doit résoudre :

$-a=A\cos(\varphi)$

$0=-A\omega_0\sin(\varphi)$

On peut choisir $A=a$ et $\varphi=\pi$ ou $-\pi$ .

$$\boxed{X=-a\cos(\omega_0 t)}$$

*d) Conditions initiales 4*

En $t=0$ , $X=0$ et $v=v_0$

On doit résoudre :

$0=A\cos(\varphi)$

$v_0=-A\omega_0\sin(\varphi)$

On peut choisir $A=\frac{v_0}{\omega_0}$ et $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ .

$X=\frac{v_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t-\frac{\pi}{2})$

$$\boxed{X=\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

*e) Conditions initiales 5*

En $t=0$ , $X=X_0$ et $v=\dot{X}_0$

On doit résoudre :

$X_0=A\cos(\varphi)$

$\frac{\dot{X}_0}{\omega_0}=-A\sin(\varphi)$

d’où en faisant la somme des deux égalités au carré :

$$\boxed{A=\sqrt{X_0^2+\dot{X}_0^2}}$$

( $A$ choisi positif)

et $\varphi$ est donné par deux lignes trigonométriques parmi :

$\sin(\varphi)=-\frac{\dot{X}_0/\omega_0}{A}$

$$\boxed{\cos(\varphi)=\frac{X_0}{A}}$$

$$\boxed{\tan(\varphi)=-\frac{\dot{X}_0/\omega_0}{X_0}}$$

Si $\cos(\varphi)>0$ on a $\varphi=-\arctan\frac{\dot{X}_0/\omega_0}{X_0}$

Si $\cos(\varphi)<0$ on a $\varphi=\pm\pi+\arctan\frac{\dot{X}_0/\omega_0}{X_0}$

# E. Généralisation

Dans de nombreux domaines, on s’est intéressé au cours de l’histoire à la recherche de l’harmonie au sens de beauté. En musique, on a montré que les instruments vibraient selon plusieurs modes propres. Dans un mode propre le son émis est pur (il ne possède qu’une seule fréquence).

Un oscillateur qui vibre selon une seule fréquence est dit : oscillateur harmonique.

## 1 Équation différentielle

On appelle oscillateur harmonique tout système physique caractérisé par un paramètre $X$ , dont l'évolution est décrite par une équation différentielle du type :

$$\boxed{\ddot{X}+\omega_0^2 X=0}$$

## 2 Solution

L’équation horaire s’écrit :

$$\boxed{X=A\cos(\omega_0 t+\varphi)}$$

## 3 Définitions

*a) Amplitude :*

$$\boxed{A}$$

C'est une grandeur définie positive (on suppose ici $|A|=A$ ).
( $X$ varie de $-A$ à $+A$ soit une étendue de $2A$ )

*b) Phase :*

La phase est $\Phi=\omega_0 t+\varphi$ .

La phase à l'origine (en $t=0$ ) est $\varphi$ .

Par abus de langage, on désigne souvent, par ce terme phase, la phase à l'origine :

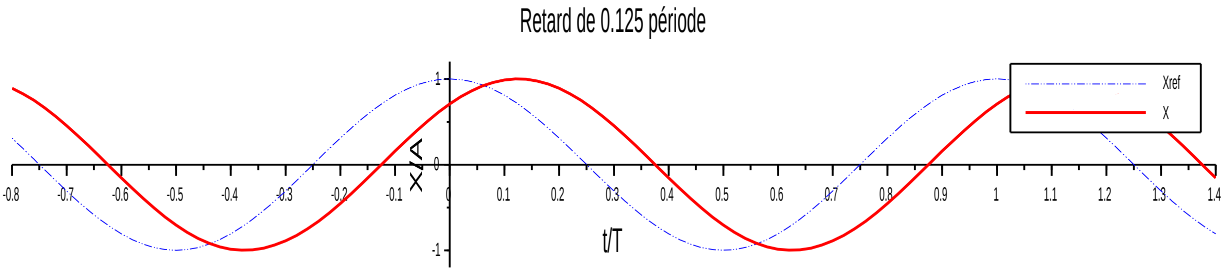
$$\boxed{\varphi}$$

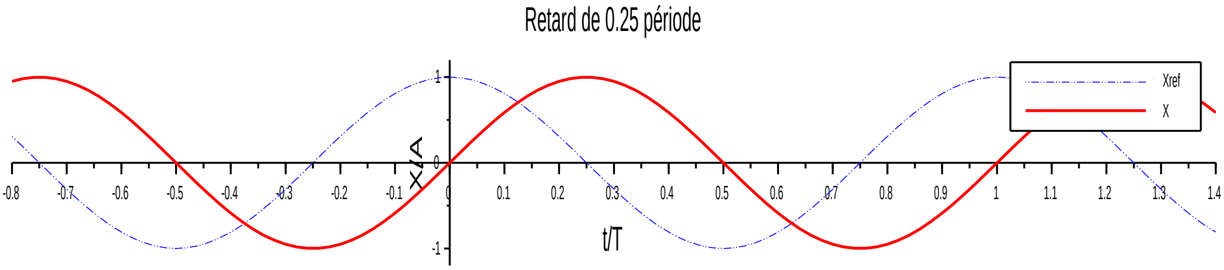
(La valeur de $\varphi$ est en lien avec le moment choisi pour $t=0$ : voir les exemples traités plus haut)

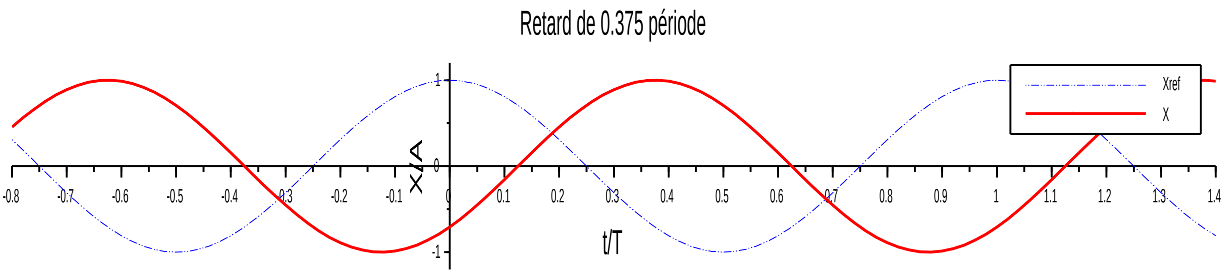
## Phase à l'origine (voir programme scilab)

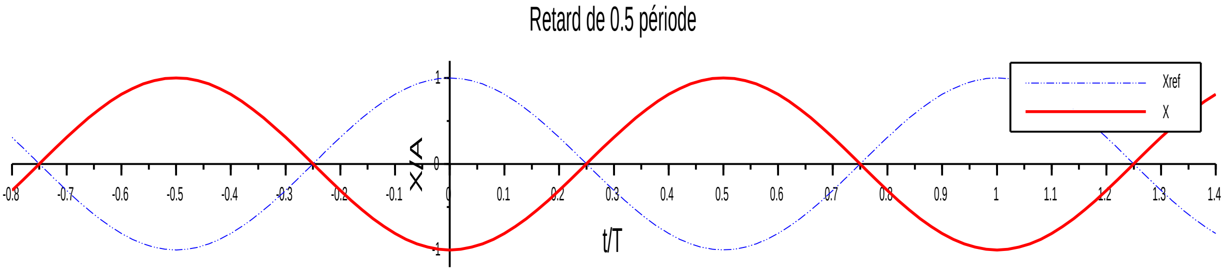
On trace $X = A\cos(\omega t + \varphi)$

-Mouvement en retard ( $\varphi < 0$ ) par rapport au mouvement référence $X_{ref} = A\cos(\omega t)$

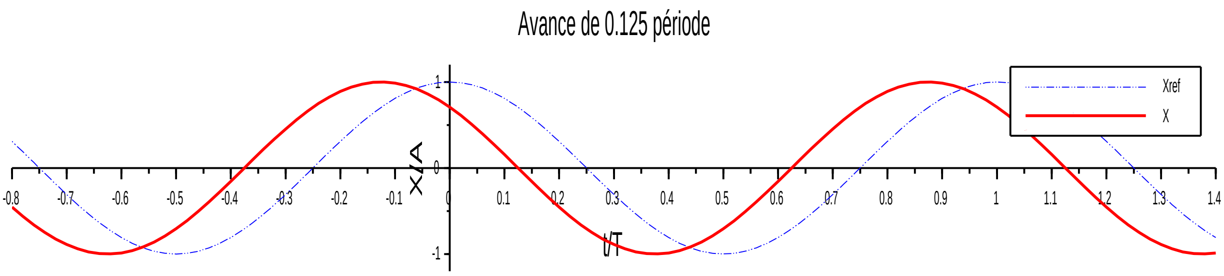


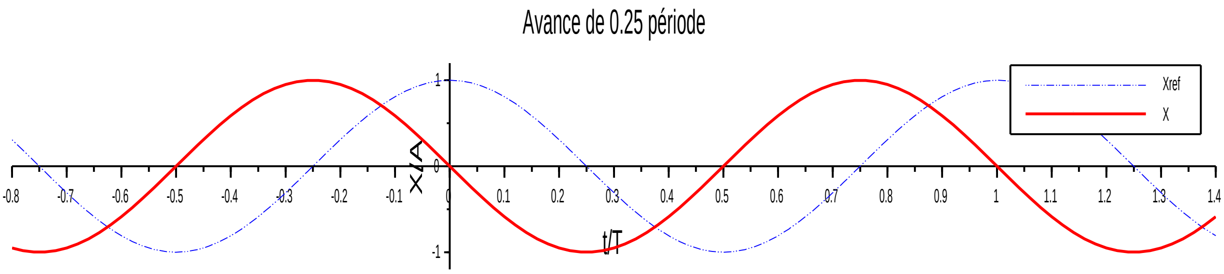



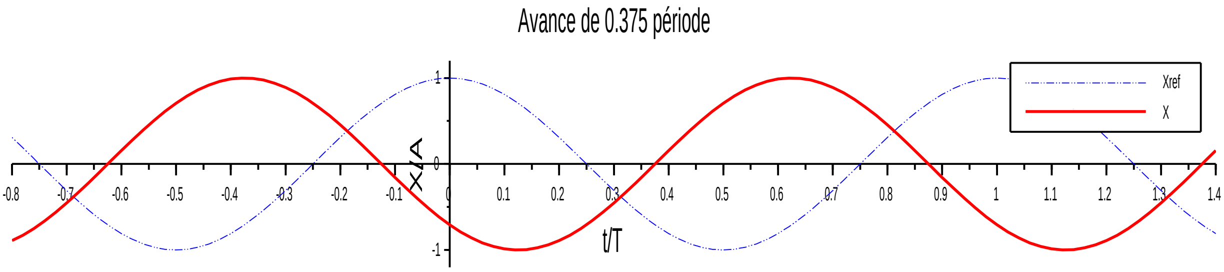



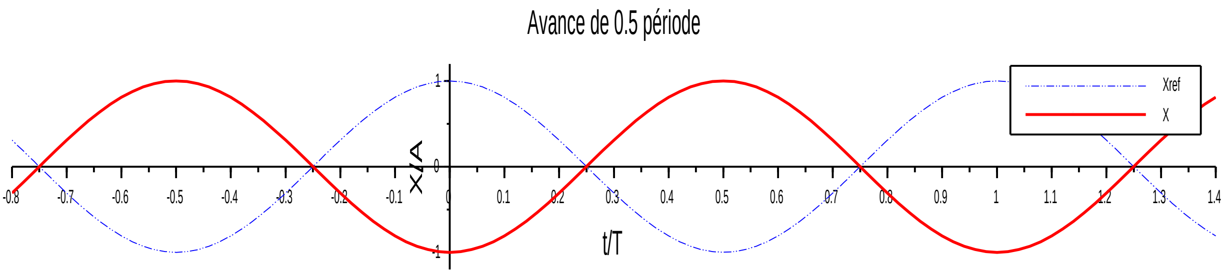



-Mouvement en avance ( $\varphi > 0$ ) par rapport au mouvement référence $X_{ref} = A\cos(\omega t)$



*c) Période et fréquence*

Le mouvement est périodique. La période $T$ est la durée minimale telle que la phase $\Phi=\omega_0 t+\varphi$ varie de $2\pi$ soit : $\omega_0 T=2\pi$

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega_0}}$$ (unité de $T$ : $s$ )

Un oscillateur harmonique se caractérise par l'isochronisme de ses oscillations, c'est à dire l'indépendance de leur période vis à vis de leur amplitude.

La fréquence $N$ correspond au nombre de périodes par seconde.

$$\boxed{N=\frac{1}{T}}$$ (dimension de $N$ : $T^{-1}$ )

(unité de $N$ : $Hz$ Hertz)

# F. Aspect énergétique

## 1 Conservation de l'énergie

En l'absence de frottement, le mouvement doit vérifier la conservation de l'énergie mécanique soit : $\textit{Énergie cinétique}+\textit{Énergie potentielle}=E(\textit{constante})$

C'est <u>une intégrale première du mouvement</u> ne faisant intervenir que des <u>dérivées premières</u> par rapport au temps, alors que le principe fondamental fait intervenir des <u>dérivées secondes</u>.

- Pour comprimer ou détendre le ressort, on met en jeu des travaux en lien avec les forces élastiques intérieures au ressort. L'énergie potentielle correspondante (à une constante près) vaut :

$$\boxed{E_P=\frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2}$$

- L'énergie cinétique de la masse $m$ vaut :

$$E_C=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc:

$$\boxed{\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad + \quad \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2 \quad = \quad E}$$

Il y a, au cours des oscillations, échanges entre les deux formes d'énergie mais celle-ci se conserve.

Vérification en utilisant l'équation horaire du mouvement :

$$X=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

$$\dot{X}=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

donc :

$$E_C=\frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)$$

$$E_P=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)$$

et en tenant compte de $m\omega_0^2=k^2$ on obtient :

$E_C+E_P=\textit{Constante}\ E$ avec :

$$\boxed{E=½\,k\,A^2=½\,m\,A^2\omega_0^2}$$

( $E=E_P max$ quand $E_C=0$ ou
$E=E_C max$ quand $E_P=0$ )

## 2 Cohérence énergie-équation différentielle du mouvement

*a) De l'équation différentielle vers la conservation de l'énergie*

On part de l'équation $(1)$

et on multiplie par $v\,dt=\frac{dx}{dt}dt=\frac{d\ell}{dt}dt=d\ell$

$$\begin{aligned}
-k(\ell-\ell_0) &= m\frac{d^2x}{dt^2}\\
-k(\ell-\ell_0)v\,dt &= m\frac{d^2x}{dt^2}v\,dt\\
-k(\ell-\ell_0)d\ell &= m\frac{dv}{dt}v\,dt\\
-k(\ell-\ell_0)d\ell &= m\,v\,dv\\
-d\left(\frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2\right) &= d\left(\frac{1}{2}m\,v^2\right)
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$d\left(\frac{1}{2}m\,v^2+\frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2\right)=0$$

ce qui correspond bien après intégration à :

$$\frac{1}{2}m\,v^2\ +\ \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2\ =\ Constante$$

*b) De la conservation de l'énergie vers l'équation différentielle*

Il est souvent plus pratique de partir de la conservation de l'énergie mécanique pour obtenir l'équation différentielle régissant le mouvement.

$$\frac{1}{2}m\,v^2\ +\ \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2\ =\ E$$

on dérive par rapport au temps :

$$\begin{aligned}
m\,v\frac{dv}{dt}+\ k(\ell-\ell_0)\frac{d\ell}{dt} &= 0\\
m\,v\frac{dv}{dt}+\ k(\ell-\ell_0)\ v &= 0
\end{aligned}$$

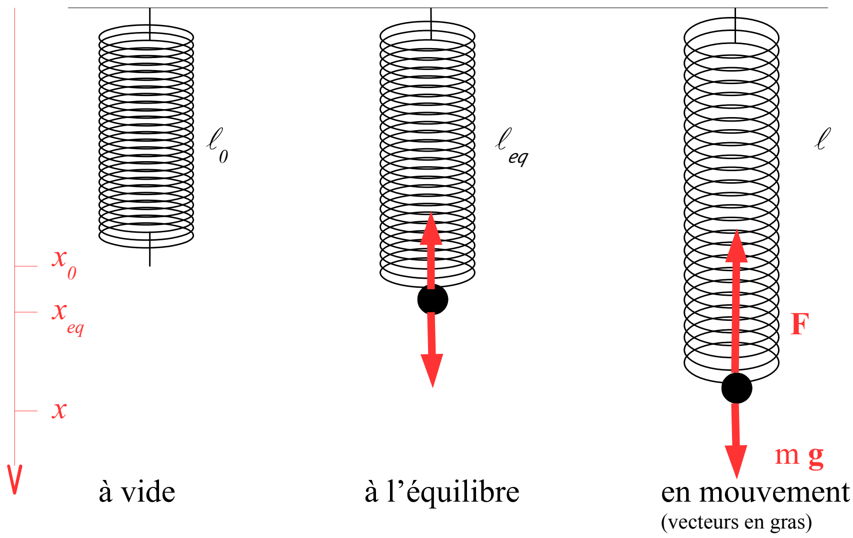
La solution $v=0$ est une solution parasite (pas de mouvement). En simplifiant, on retrouve l'équation différentielle du mouvement :

$$m\frac{dv}{dt}\ +\ k(\ell-\ell_0)\ =\ 0$$

# III. Compléments

## A. Mouvement vertical sans frottement d'une masse accrochée à un ressort sans masse, soumise à la pesanteur

- Cet exercice permettra de mieux différencier longueur à vide et longueur à l'équilibre.
- On précisera aussi la notion d'énergie potentielle dans les problèmes faisant intervenir des ressorts.




### 1 Équation différentielle

*a) Écriture du principe fondamental*

au point $M$ de masse $m$ en mouvement :

L'axe vertical $x$ est orienté vers le bas. Son origine sera précisée ultérieurement.

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$-k(\ell-\ell_0)\ \vec{u}_x + mg\ \vec{u}_x = m\frac{d^2x}{dt^2}\ \vec{u}_x$$

$$/\vec{u}_x \qquad -k(\ell-\ell_0) + mg = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1)$$

*b) Origine quelconque*

Si on choisit une origine quelconque (c'est un choix inhabituel qu'on évitera en général)

$$-k(x-x_0) + mg = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2)$$

Cette équation différentielle peut s'écrire :

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = (g+\omega_0^2\, x_0) \quad \text{avec} \quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'équation différentielle du deuxième ordre possède cette fois un second membre constant.

La solution de cette équation est la somme :

- de la solution de l'équation homogène $\ddot{x}+\omega_0^2\, x=0$ soit :

$$x_1 = A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

- de la solution particulière avec second membre obtenue en faisant $x=constante$ (et donc $\ddot{x}=0$ ) soit :

$$\omega_0^2\, x_2 = (g+\omega_0^2\, x_0)$$

$$x_2 = \frac{m\,g}{k}+x_0$$

La solution est donc :

$$x = A\cos(\omega_0 t+\varphi) + (\frac{m\,g}{k}+x_0)$$

Les constantes $A$ et $\varphi$ sont déterminées alors en utilisant les conditions initiales.

Commentaire : la masse oscille donc autour de l'abscisse $(m\,g/k + x_0)$ . Cette position est donc la position d'équilibre stable de la masse. On a donc $x_{eq}=m\,g/k + x_0$ . On remarquera que sur le plan mathématique, il s'agit de la solution particulière correspondant à $\ddot{x}=0$ , ce qui physiquement correspond bien à la recherche de l'équilibre.

*c) Origine quelconque en tenant compte de la position d'équilibre*

On étudie dès le départ la relation d'équilibre (il suffit de faire $\ddot{x}=0$ dans l'étude faite pour le mouvement) et on reporte dans l'équation du mouvement par exemple par soustraction des deux équations

$$-k(\ell-\ell_0) + m\,g = m\,\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{(mouvement)}$$

$$-k(\ell_{eq}-\ell_0) + m\,g = 0 \quad \text{(équilibre)}$$

Le poids et la tension du ressort s'annulent à l'équilibre. L'allongement du ressort à l'équilibre est donc $(\ell_{eq}-\ell_0) = \frac{m\,g}{k}$

On obtient :

$$-k(\ell-\ell_{eq}) = m\,\frac{d^2x}{dt^2} \quad (1\,bis)$$

soit toujours avec une origine quelconque :

$$-k(x-x_{eq}) = m\,\frac{d^2x}{dt^2} \quad (2\,bis)$$

dont la solution est :

$$x = A\cos(\omega_0 t+\varphi) + x_{eq}$$

(l'allongement à l'équilibre nous montrant de plus que $x_{eq}=m\,g/k + x_0$ )

*d) Origine à la position d'équilibre*

C'est la méthode la plus performante pour résoudre.

On avait :

$$-k(\ell-\ell_{eq}) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

On prend une origine à la position d'équilibre, l'abscisse est alors notée $X$ . Par rapport au cas précédent $X=\ell-\ell_{eq}=x-x_{eq}$ .

$$-kX = m\frac{d^2X}{dt^2}$$

et on retrouve alors l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{X}+\omega_0^2X=0 \quad (3)$$

$$X = A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

*e) Mise en équation rapide du mouvement*

On sait (et on l'a retrouvé ci dessus) qu'à l'équilibre la force poids et la tension du ressort due à l'allongement $(\ell_{eq}-\ell_0)$ s'annulent. En mouvement, la seule force agissante est donc la tension supplémentaire du ressort en sus de l'équilibre soit $\vec{F}_{tot}$ avec $\vec{F}_{tot}=-k(\ell-\ell_{eq})\vec{u}_x$ . (Pour trouver le signe, imaginer le cas particulier $\ell>\ell_{eq}$ et constater que la tension supplémentaire qui apparaît dans ce cas particulier est une force de rappel vers la longueur d'équilibre donc selon $-\vec{u}_x$ ). On obtient alors immédiatement :

$$-k(\ell-\ell_{eq}) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kX = m\frac{d^2X}{dt^2}$$

mais on n'a pas établi l'expression de $\ell_{eq}$ .

*f) Un exemple de conditions initiales*

On considère un ressort vertical de longueur $\ell_0$ , de raideur $k$ , attaché en $O$ . L'autre extrémité du ressort est désignée par $M$ . On choisit un axe vertical descendant d'origine $O$ . En $t=0$ on accroche une masse $m$ en $M$ . Déterminer $z(t)$ la cote de $M$ . On néglige tout frottement.

On peut prévoir le résultat :
Position de départ : $z=\ell_0$
Position d'équilibre : $z=\ell_0+mg/k$
Amplitude du mouvement : $mg/k$
(entre la position de vitesse nulle et la position de vitesse maximale)
Pulsation du mouvement : $\omega_0=\sqrt{k/m}$
donc équation : $z=\ell_0+(mg/k)+(mg/k)\cos(\omega_0 t+\varphi)$
Reste à déterminer $\varphi$ ce qui est facile sachant que $z=\ell_0$ en $t=0$ .
Finalement : $z=\ell_0+(mg/k)(1-\cos(\omega_0 t))$

Pour établir la solution :

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$$
$$-k(\ell-\ell_0) + mg = m\ddot{z}$$
$$-k(\ell_{eq}-\ell_0) + mg = 0 \quad \text{donc} \quad \ell_{eq}=\ell_0 + mg/k$$

Par soustraction :

$$-k(\ell-\ell_{eq}) = m\ddot{z}$$

Avec l'origine choisie $z=\ell$

$$\ddot{z} + \omega_0^2(z-l_{eq}) = 0$$

Le plus simple est de poser un changement de variable pour résoudre : $Z=z-l_{eq}$

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$$

Solution :

$$Z = A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$
$$z = A\cos(\omega_0 t+\varphi)+\ell_0 + mg/k$$
$$\dot{z} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

Conditions initiales
en $t=0$ , $z=\ell_0$ $\qquad \ell_0= A\cos(\varphi) +\ell_0 + mg/k$
en $t=0$ , $\dot{z}=0$ $\qquad 0= -A\omega_0\sin(\varphi)$
On doit résoudre :
$A\cos(\varphi)=-mg/k$
$A\sin(\varphi)= 0$
On choisit :
$A= mg/k$
$\varphi = \pi$

Finalement :

$$z =\ell_0 + (mg/k)(1-\cos(\omega_0 t))$$

## 2 Énergie

L'étude énergétique permet d'étudier ce problème de façon élégante.

### *a) Intégrale première de conservation de l'énergie*

En l'absence de frottement, l'énergie se conserve :

$$E_C+E_P=E(constante)$$

avec :

$$E_C=½mv^2$$

L'énergie potentielle est ici double : énergie potentielle en lien avec le travail des forces intérieures au ressort (énergie potentielle élastique égale à $E_{P,elastique}=½k(\ell-\ell_0)^2$ à une constante près) et énergie potentielle en lien avec le poids (énergie potentielle de pesanteur égale à $E_{P,pesanteur}=-mgx$ à une constante près. Le signe est en lien avec l'orientation de l'axe vers le bas car si $x$ augmente, $E_{P,pesanteur}$ doit diminuer).

### *b) Origine quelconque*

C'est un choix inhabituel qui ne simplifie pas les calculs

$$E_C=½m\dot{x}^2$$

$$E_P=½k(x-x_0)^2-mgx+constante$$

On peut - ce n'est pas nécessaire - décider d'un niveau zéro pour $E_P$, par exemple choisir $E_P$ nul en $x=x_0$, alors on fera :

$$E_P=½k(x-x_0)^2-mg(x-x_0)$$

L'intégrale première s'écrit :

$$½m\dot{x}^2+½k(x-x_0)^2-mg(x-x_0)=E$$

La logique est alors de déterminer $E$ grâce aux conditions initiales puis d'intégrer cette équation différentielle du premier ordre (mais non linéaire). On cherche plutôt à retrouver l'équation différentielle du second ordre en dérivant par rapport au temps, ce qui donne :

$$m\dot{x}\ddot{x}+k(x-x_0)\dot{x}-mg\dot{x}=0$$

La solution parasite $\dot{x}=0$ s'introduit toujours dans ces problèmes d'énergie. On retrouve l'équation différentielle $(2)$ :

$$-k(x-x_0)+mg=m\ddot{x} \qquad (2)$$

### *c) Origine à la position d'équilibre*

Expression de $E_P$ :

On choisit $E_P=0$ à la position d'équilibre, l'origine de l'axe est aussi à la position d'équilibre.

– Méthode calculatoire (éviter) :

$E_{P,elastique}=½k(\ell-\ell_0)^2-½k(\ell_{eq}-\ell_0)^2$ (nul pour $\ell=\ell_{eq}$ )

$E_{P,elastique}=½k(\ell+\ell_{eq}-2\ell_0)X$

$E_{P,pesanteur}=-mgX$ ou en tenant compte de la relation à l'équilibre :

$$E_{P,pesanteur} = -k(\ell_{eq} - \ell_0) X$$

On simplifie :

$$E_P = ½ k (\ell + \ell_{eq} - 2\ell_0) X - k(\ell_{eq} - \ell_0) X$$

$$E_P = ½ k X^2$$

– Méthode élégante :

On sait que la force totale (<u>tenant compte de la pesanteur et de la force élastique</u>) agissant sur la masse $m$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{F}_{tot} = -k X \vec{u}_x}$$

Pour obtenir l'énergie potentielle <u>totale</u>, il suffit de trouver l'énergie potentielle associée à cette force. À une constante près, cette énergie potentielle vaut :

$$\boxed{E_{P,tot} = ½ k X^2}$$

Intégrale première :

$$½ m \dot{X}^2 + ½ k X^2 = E$$

On dérive par rapport au temps, ce qui donne :

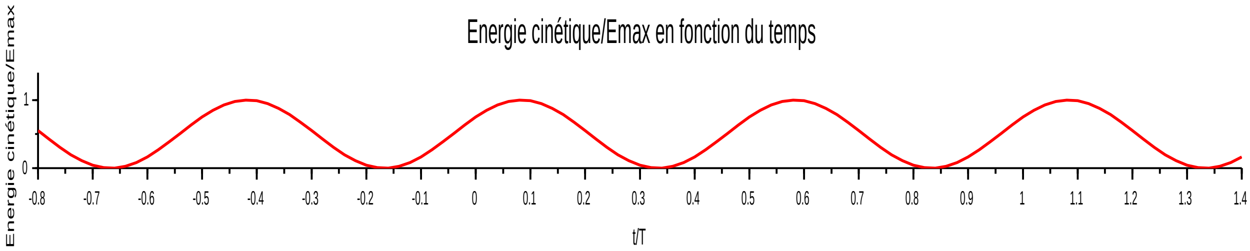
$$m \dot{X} \ddot{X} + k X \dot{X} = 0$$

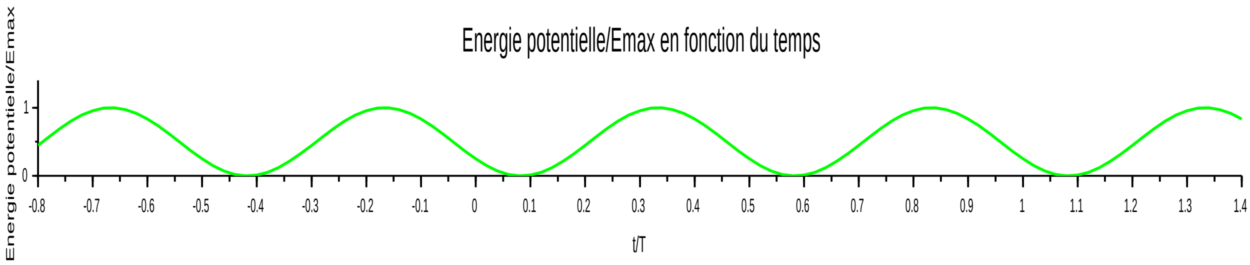
On élimine la solution parasite $\dot{X} = 0$ habituelle et on retrouve l'équation différentielle $(3)$ :

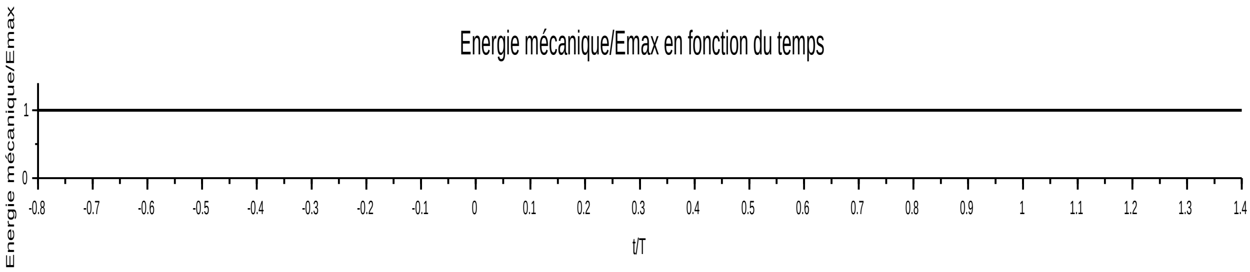
$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad (3)$$

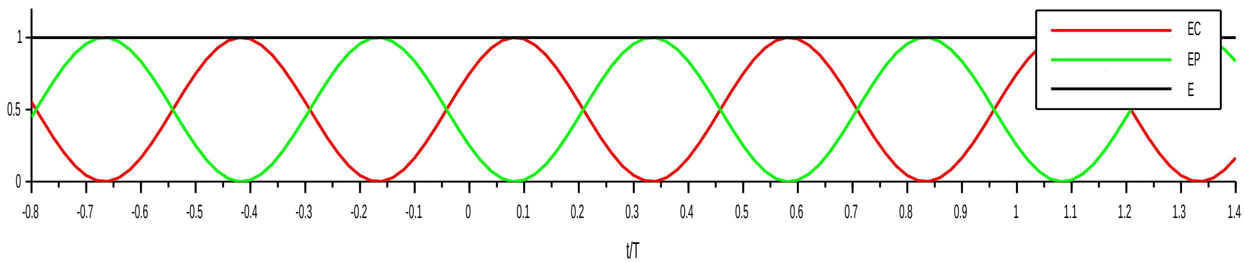
## Échanges d'énergie (voir programme scilab)

Pour l'oscillateur harmonique mécanique, il y a échange entre énergie cinétique et énergie potentielle. La somme des deux est une constante.



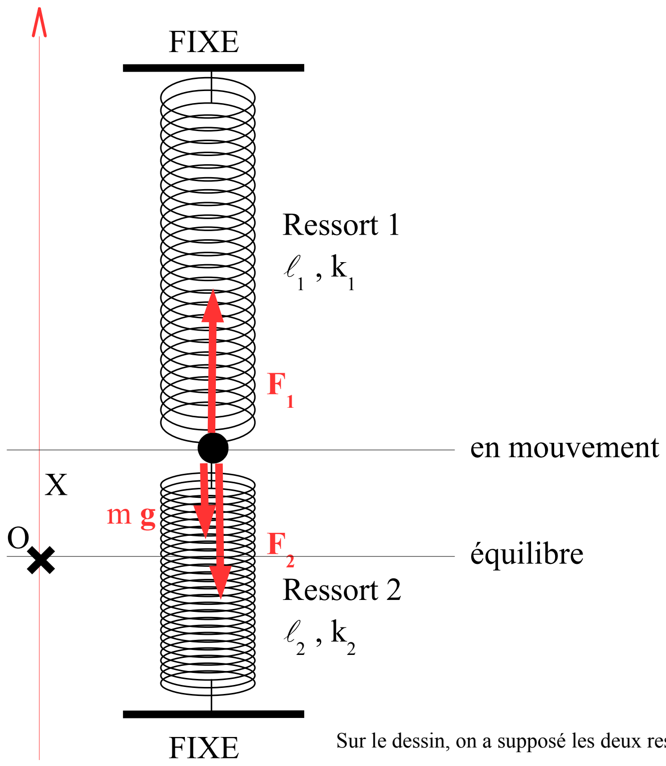



# B. Mouvement vertical sans frottement d'une masse accrochée à deux ressorts opposés

- Cet exercice permettra d'étudier un ressort fixé à son extrémité basse.
- Cet exercice permettra de revoir les méthodes déjà rencontrées.




Sur le dessin, on a supposé les deux ressorts étirés par rapport à leur longueur à vide.

## 1 Étude complète par les forces

On applique le principe fondamental à la masse $m$ :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$k_1(\ell_1-\ell_{0,1})\vec{u}_x - k_2(\ell_2-\ell_{0,2})\vec{u}_x - mg\vec{u}_x = m\ddot{x}\vec{u}_x$$

on projette sur $\vec{u}_x$ :

$$k_1(\ell_1-\ell_{0,1})-k_2(\ell_2-\ell_{0,2})-mg = m\ddot{x}$$

$$k_1(\ell_{1,eq}-\ell_{0,1})-k_2(\ell_{2,eq}-\ell_{0,2})-mg = 0$$ (relation à l'équilibre)

on soustrait :

$$k_1(\ell_1-\ell_{1,eq})-k_2(\ell_2-\ell_{2,eq}) = m\ddot{x}$$

avec :

$$\ell_1=\ell_{1,eq}-X$$

$$\ell_2=\ell_{2,eq}+X$$

(on doit avoir $\ell_1+\ell_2=\ell_{1,eq}+\ell_{2,eq}$ , le sens choisi pour l'axe $X$ est vers le haut donc si $X>0$ $\ell_2>\ell_{2,eq}$ en accord avec $\ell_2=\ell_{2,eq}+X$ )

finalement on arrive à :

$$-k_1X-k_2X=m\ddot{X}$$

$$-(k_1+k_2)X=m\ddot{X}$$

Les oscillations sont les mêmes qu'avec un ressort de raideur $k=k_1+k_2$ .

## 2 Étude rapide par les forces

Les forces présentes à l'équilibre s'annulent. On ne tient compte que des forces supplémentaires en sus des forces présentes à l'équilibre. Imaginons la masse à l'équilibre, on la déplace de $X$ (supposé positif pour faciliter la réflexion). Alors le ressort 1 subit une compression par rapport à l'équilibre et exerce une force supplémentaire de rappel dans le sens opposé $\vec{F}_{1,sup}=-k_1 X\vec{u}_x$ . Le ressort 2 subit une détente par rapport à l'équilibre et exerce une force supplémentaire de rappel dans le sens opposé $\vec{F}_{2,sup}=-k_2 X\vec{u}_x$ .

On obtient immédiatement :

$$\vec{F}_{tot}=-k_1 X\vec{u}_x-k_2 X\vec{u}_x$$

et finalement :

$$-k_1 X-k_2 X=m\ddot{X}$$

## 3 Énergie

*a) Expression de l'énergie potentielle*

Méthode calculatoire (éviter):

$E_{P,élastique}=½k_1(\ell_1-\ell_{0,1})^2+½k_2(\ell_2-\ell_{0,2})^2$ (à une constante près)

$E_{P,pesanteur}=mgx$ (à une constante près)(si $x$ augmente, $E_{P,pesanteur}$ doit augmenter puisque l'axe des $x$ est selon la verticale ascendante)

$$E_P=½k_1(\ell_1-\ell_{0,1})^2+½k_2(\ell_2-\ell_{0,2})^2+mgx+constante$$

On choisit l'origine de l'axe à la position d'équilibre et on choisit $E_P=0$ à la position d'équilibre.

$$E_P=½k_1(\ell_1-\ell_{0,1})^2-½k_1(\ell_{eq,1}-\ell_{0,1})^2+½k_2(\ell_2-\ell_{0,2})^2-½k_2(\ell_{eq,2}-\ell_{0,2})^2+mgX$$

$$E_P=½k_1(\ell_1+\ell_{eq,1}-2\ell_{0,1})(\ell_1-\ell_{eq,1})+½k_2(\ell_2+\ell_{eq,2}-2\ell_{0,2})(\ell_2-\ell_{eq,2})+mgX$$

$$E_P=½k_1(\ell_1+\ell_{eq,1}-2\ell_{0,1})(-X)+½k_2(\ell_2+\ell_{eq,2}-2\ell_{0,2})(X)+mgX$$

On remplace $mg$ par son expression obtenue lors de l'étude de l'équilibre.

$$E_P=½k_1(\ell_1+\ell_{eq,1}-2\ell_{0,1})(-X)+½k_2(\ell_2+\ell_{eq,2}-2\ell_{0,2})(X)+(k_1(\ell_{1,eq}-\ell_{0,1})-k_2(\ell_{2,eq}-\ell_{0,2}))X$$

$$E_P=½k_1(-\ell_1+\ell_{eq,1})X+½k_2(\ell_2-\ell_{eq,2})X$$

$$E_P=½(k_1+k_2)X^2$$

L'énergie potentielle totale est la même qu'avec un ressort de raideur $k=k_1+k_2$ .

Méthode plus rapide :

Ce résultat était prévisible puisque on a établi que la force totale agissant sur la masse $m$ est: $\vec{F}_{tot}=-(k_1+k_2)X\vec{u}_x$ . L'énergie potentielle associée à cette force, à une constante près, vaut :

$$E_{P,tot}=½(k_1+k_2)X^2$$

En conclusion, pour obtenir rapidement l'énergie potentielle totale ici, il faut déterminer la force totale et l'énergie potentielle associée et ne pas chercher à décomposer l'énergie potentielle relativement à chaque force présente. L'origine de l'axe et de l'énergie potentielle à la position d'équilibre s'impose.

*b) Intégrale première*

Elle s'écrit donc:

$$\tfrac{1}{2} m \dot{X}^2 + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) X^2 = E$$

*******************